Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

Année Univ : 08 –09
SMA / SMI
durée : 2 heures

1er Contrôle de Mécanique

Toute bonne présentation sera notée *(1pt)*

Exercice : (6 points)

Un mobile M décrit une **hélice circulaire** d'axe Oz, définie par les équations, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases}$$ R : rayon de l'hélice ; h : pas de l'hélice (Ctes)

1°) Le mouvement est défini par la loi $\theta(t) = \omega t$.

a) Déterminer la vitesse du mobile M, et son module. *(1pt)*

b) Déterminer l'accélération du mobile M. *(1pt)*

2°) Dans le cas où **ω constante**, que peut-on dire de l'accélération ? *(1pt)*

a) En déduire l'expression du rayon de courbure ρ de la trajectoire. *(1pt)*

b) Exprimer la vitesse et l'accélération avec les **coordonnées cylindriques** (en fonction de R, h, et ω). *(2pts)*

Problème : (13 points)

Une bille M, que l'on peut assimiler à un point matériel de masse m, est mobile sans frottement à l'intérieur d'un tube circulaire de rayon R. Ce tube tourne autour de son diamètre vertical avec une vitesse angulaire **constante** $\dot{\alpha} = \omega$. On suppose que le tube est dans le plan xOz du repère fixe $\Re(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



Le repère mobile lié au tube est défini par $\Re_1\left(O,\vec{e}_{x_1},\vec{e}_{y_1},\vec{e}_{z_1}\right)$. On pose $\theta = \left(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM}\right)$.

1°) Déterminer **la vitesse** et **l'accélération** de M dans la **base sphérique** $\Re_{sph}\left(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi\right)$ par rapport au **repère galiléen** $\Re$. *(3pts)*

2°) Donner l'expression des forces qui s'exercent sur le point M dans $\Re$, en **coordonnées sphériques** ? *(1pt)*

3°) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, écrire les équations différentielles du mouvement. *(2pts)*

4°) Résoudre l'équation différentielle dans le cas où **θ est faible**. *(2pts)*

Remarque : les conditions initiales sont : à t = 0, $\theta = \pi/3$ et $\dot{\theta} = 0$.

5°) Déterminer la force d'inertie d'entrainement. *(2pts)*

6°) Déterminer la force d'inertie de coriolis. *(2pts)*

7°) Calculer les travaux W de toutes les forces exercées sur M. *(1pt)*

Correction de CC1 (Mécanique)

Problème : (12 pts)

1°/ $\mathcal{R}(O, e_x, e_y, e_z) \xrightarrow[\vec{e_z}]{\omega = \dot{\alpha} = cte} \mathcal{R}_1(O, \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}) \xrightarrow[\vec{e_\varphi}]{\theta} \mathcal{R}(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

La vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ dans la base sphérique :

$$\vec{OM} = R\vec{e_r} \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big/_{\mathcal{R}} = R\frac{d\vec{e_r}}{dt} = R\vec{\Omega} \wedge \vec{e_r}$$

avec $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{e_z} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi} = \omega\cos\theta\vec{e_r} - \omega\sin\theta\vec{e_\theta} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} + R\omega\sin\theta\,\vec{e_\varphi}}$$ (1,5 pts)

z, z_1, ω, $\vec{e_r}$, M, $\vec{e_\theta}$, θ, R, x_1, O, $\alpha = \varphi$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}\Big/_{\mathcal{R}} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + R\dot{\theta}\vec{\Omega}\wedge\vec{e_\theta} + R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_\varphi} + R\omega\sin\theta\,\vec{\Omega}\wedge\vec{e_\varphi}$$

$$= \left(-R\dot{\theta}^2 - R\omega^2\sin^2\theta\right)\vec{e_r} + \left(R\ddot{\theta} - R\omega^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e_\theta} + 2R\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_\varphi}$$ (1,5)

2°/ Les forces dans $\mathcal{R}$: $\vec{P} = -mg\vec{e_z} = -mg\cos\theta\,\vec{e_r} + mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$ (1 pt)

$\vec{R} \perp \vec{e_\theta} = R_r\vec{e_r} + R_\varphi\vec{e_\varphi}$

3°/ P.F.D : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$

$$\begin{cases} -mg\cos\theta + R_r = -mR\dot{\theta}^2 - mR\omega^2\sin^2\theta & (1) \\ mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} - mR\omega^2\sin\theta\cos\theta & (2) \\ R_\varphi = 2mR\omega\dot{\theta}\cos\theta & (3) \end{cases}$$ (2 pts)

4°/ Equation différentielle en θ : (2) $\Rightarrow \ddot{\theta} - \left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right)\cdot\theta = 0$

car θ faible $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$

$$\theta = e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha^2 - \left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\theta = Ae^{\sqrt{\omega^2+\frac{g}{R}}\,t} + Be^{\sqrt{\omega^2+\frac{g}{R}}\,t}}$$ à $t=0$ $\begin{cases} \theta = \pi/3 = A + B \\ \dot{\theta} = 0 \Rightarrow A = B \end{cases} \Rightarrow A = B = \pi/6$

d'où $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}\,ch\sqrt{\omega^2 + \frac{g}{R}}\cdot t}$

5°/ $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\Big/_{\mathcal{R}} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{OM}\right)$$

avec $\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\Big/_{\mathcal{R}} = \ddot{\theta}\vec{e_\varphi} + \dot{\theta}\left(\omega\cos\theta\vec{e_r} - \omega\sin\theta\vec{e_\theta} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}\right)\wedge\vec{e_\varphi} + \frac{d}{dt}(\omega\vec{e_z})$

D'où $\vec{F}_{ie} = mR(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta)\vec{e}_r - mR(\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta - 2mR\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$ (2pts)

$\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_r$ $\left(\vec{V}_r = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_{R_{sph}} = \dot{R}\vec{e}_r = \vec{0}\right)$ (1pt)

$= \vec{0}$

2°/ $W_{\vec{P}} = \vec{P}\cdot\vec{OM} = (-mg\cos\theta\,\vec{e}_r + mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta)\cdot R\vec{e}_r = -mgR\cos\theta$

$W_{\vec{R}} = \vec{R}\cdot\vec{OM} = (R_r\vec{e}_r + R_\varphi\vec{e}_\varphi)\cdot R\vec{e}_r = R\cdot R_r$ (1pt)

$W_{\vec{F}_{ie}} = mR^2(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2)$

$W_{\vec{F}_{ic}} = 0$

Exercice : (8pts)

1°/ a/ $\vec{OM}\begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ h\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} -R\omega\sin\theta \\ R\omega\cos\theta \\ h\omega \end{cases} \Rightarrow \|\vec{V}\| = \omega\sqrt{R^2+h^2}$ (2pts)

$\Rightarrow \vec{\gamma}\begin{cases} -R\omega^2\cos\theta - R\dot{\omega}\sin\theta \\ -R\omega^2\sin\theta + R\dot{\omega}\cos\theta \\ h\dot{\omega} \end{cases}$ (2pts)

2°/ $\omega = cte \Rightarrow v = cte \Rightarrow \gamma_t = \frac{dV}{dt} = 0$ et $\gamma = \gamma_n = R\omega^2$ (est normale) (1pt)

a/ $\rho = \frac{V^2}{\gamma_n} = \frac{R^2+h^2}{R}$ (1pt)

b/ $\vec{OM} = R\cos\theta\,\vec{e}_x + R\sin\theta\,\vec{e}_y + h\theta\,\vec{e}_z$

$= R(\underbrace{\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y}) + h\theta\,\vec{e}_z$

$= R\,\vec{e}_\rho + h\theta\,\vec{e}_z$

$\Rightarrow \vec{V} = R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + h\omega\vec{e}_z = R\omega\vec{e}_z\wedge\vec{e}_\rho + h\omega\vec{e}_z$

$= R\omega\vec{e}_\theta + h\omega\vec{e}_z$

$\vec{\gamma} = R\omega\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + 0 = -R\omega^2\vec{e}_\rho$ (2pts)